

Série 3 – corrigé

Exo. 3.1

Etablir les équations 3.27 à 3.33.

Soit $f(x_1, x_2, x_3, t)$ une fonction scalaire. Calculer $\frac{D}{Dt}(\partial_i f)$ et $\partial_i \left(\frac{Df}{Dt} \right)$

$$\frac{D}{Dt}(\partial_i f) = \frac{D}{Dt}(\partial f / \partial x_i) = \frac{\partial}{\partial t}(\partial f / \partial x_i) + \mathbf{V} \cdot \text{grad}(\partial f / \partial x_i)$$

$$\frac{D}{Dt}(\partial_i f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} + \mathbf{V} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} + V_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\partial_i \left(\frac{Df}{Dt} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \text{grad} f \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(V_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} + V_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$$

Ces deux quantités sont égales ssi le champ de vitesse ne dépend pas de la coordonnée x_i .

Exercice 3.2 : Fusion par laser

$$T(r) = T_\alpha + \frac{\beta P}{2\pi\kappa r} \exp\left(-\frac{V(x+r)}{2\alpha}\right) \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1- α étant la diffusivité thermique elle s'exprime en m^2/s . Ainsi, à l'intérieur de l'exponentiel

$$\frac{m}{s} \cdot \frac{m}{m^2} \cdot s = [-]. \beta \text{ est un rendement ou une efficacité donc sans unité. } \kappa \text{ est la conductivité}$$

thermique en W/mK . $\frac{\beta P}{\kappa r} = \frac{W}{\frac{W}{mK} m} = K$ soit une température.

- 2- La température tend vers l'infinie lorsque $r=0$. Le modèle est divergent, c'est la grande limitation de ce modèle.
- 3- Représentation Eulérienne : la température est donnée dans la fenêtre d'observation située en r et elle ne dépend pas du temps, le champ est stationnaire.
- 4- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ et pourtant il y a bien chauffage de la matière en avant de la source puis refroidissement après.
- 5- Dérivée particulaire de la température :

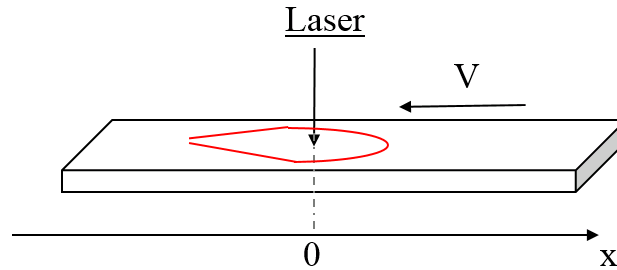
Pour $x < 0, y = z = 0$ et $r = -x$

Pour $x < 0, y = z = 0$ et $r = -x, T = T_\alpha - \frac{\beta P}{2\pi\kappa x}$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T \text{ avec } \vec{v} = -V \vec{e}_x$$

et $\frac{DT}{Dt} = \frac{\beta P}{2\pi\kappa x^2} = -\frac{V\beta P}{2\pi\kappa x^2} < 0$. i.e. refroidissement en $x < 0$

6- En Lagrangien, on suit un élément de matière qui se trouve à $(x_0, 0, 0)$ à $t = 0$ et qui se déplace à la vitesse $-V$ selon x :



$$x = x_0 - Vt, \quad r = |x_0 - Vt|$$

$$r = x_0 - Vt \quad \text{si } x_0 > Vt \quad \text{i.e. } t < \frac{x_0}{V} \quad \text{et } T = T_a + \frac{\beta P}{2\pi\kappa(x_0 - Vt)} \exp\left(-\frac{V^2 t - x_0 V}{\alpha}\right)$$

$$r = Vt - x_0 \quad \text{si } x_0 < Vt \quad \text{i.e. } t > \frac{x_0}{V} \quad \text{et } T = T_a + \frac{\beta P}{2\pi\kappa(Vt - x_0)} \exp(0) = T_a + \frac{\beta P}{2\pi\kappa(Vt - x_0)}$$

La dérivée temporelle en amont et en aval de la source laser vaut donc :

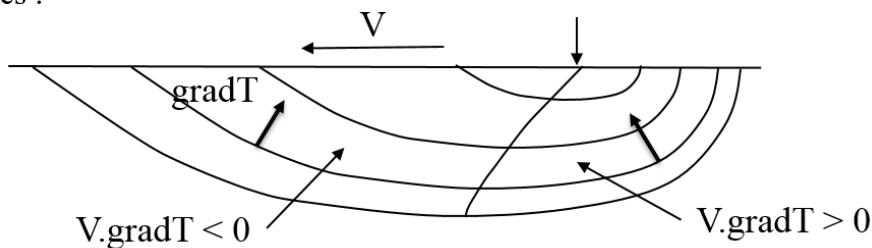
$$\text{pour } x > 0, \quad \dot{T} = \frac{\beta P V^2}{\alpha 2\pi\kappa(x_0 - Vt)} \exp\left(-\frac{V^2 t - x_0 V}{\alpha}\right) + \frac{V\beta P}{2\pi\kappa(x_0 - Vt)^2} \exp\left(-\frac{V^2 t - x_0 V}{\alpha}\right)$$

$$\dot{T} = \frac{\beta P V}{2\pi\kappa(x_0 - Vt)} \exp\left(-\frac{V^2 t - x_0 V}{\alpha}\right) \left[\frac{V}{\alpha} + \frac{1}{x_0 - Vt} \right] > 0, \quad \text{i.e. chauffage}$$

$$\text{pour } x < 0, \quad \dot{T} = -\frac{\beta P V}{2\pi\kappa(Vt - x_0)^2} < 0. \quad \text{i.e. refroidissement}$$

Pour $x < 0$, i.e en aval de la source laser, les approches eulérienne et lagrangienne donnent évidemment la même expression de la vitesse de refroidissement. Il en est de même pour le chauffage en amont de la source

Dans le plan $y = 0$, la zone de chauffage et celle de refroidissement sont délimitées par le signe du produit scalaire de la vitesse et du gradient de température, ce dernier étant perpendiculaire aux isothermes :



Exercice 3.8 : Ecoulement potentiel

On considère un écoulement défini par le champ de vitesse $\mathbf{V} = 4x_1 \mathbf{e}_1 - 2x_2^2 \mathbf{e}_2 + x_3^2 \mathbf{e}_3$ sur le domaine $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1^2 + x_2^2 \leq 4, 0 \leq x_3 \leq 3\}$.

En renommant les coordonnées $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, le domaine Ω est un cylindre d'axe Oz, de rayon $R=2$ et délimité par les plans $z = 0$ et $z = H = 3$. On a donc :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4x \\ -2y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$$

1) Le domaine Ω est le cylindre de rayon 2 et d'axe z. $\text{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4x \\ -2y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ L'écoulement est donc irrotationnel.}$$

2) On calcule le flux à travers chaque bordure du cylindre. Il y a donc le cercle supérieur noté S_1 , le cercle inférieur noté S_2 et la surface cylindrique S_3 . On définit pour rendre plus simple les prochains calculs les **coordonnées cylindriques** (r, θ, z) . Le domaine devient donc $\Omega = \{(r, \theta, z) \mid 0 < r \leq R, 0 \leq z \leq H\}$. Les normales pour chaque surfaces S_1, S_2 et S_3 sont respectivement $\vec{u}_z, -\vec{u}_z$ et \vec{u}_r .

Ainsi :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \int_{S_1} \vec{v} \cdot \vec{u}_z dS + \int_{S_2} \vec{v} \cdot (-\vec{u}_z) dS + \int_{S_3} \vec{v} \cdot \vec{u}_r dS$$

Pour $S_1 : \vec{v}(z = H) = \begin{pmatrix} 4x \\ -2y^2 \\ H^2 \end{pmatrix}$ donc $Q_1 = \int_{S_1} H^2 dS = H^2 \times S_1 = \pi R^2 \cdot H^2 = 36\pi$

Pour $S_2 : \vec{v}(z = 0) = \begin{pmatrix} 4x \\ -2y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $Q_2 = \int_{S_2} 0 \cdot dS = 0$

Pour $S_3 : r = R = \sqrt{x^2 + y^2}, \vec{u}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, x = R \cdot \cos \theta, y = R \cdot \sin \theta,$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \cdot R \cdot \cos \theta \\ -2 \cdot R^2 \cdot \sin \theta \\ z^2 \end{pmatrix}, dS = R d\theta dz :$$

$$Q_3 = 4R^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^H \cos^2 \theta d\theta dz - 2R^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^H \sin^3 \theta d\theta dz$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} d\theta = \left[\frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} + \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin \theta \cdot (1 - \cos^2 \theta) d\theta = [\cos \theta]_0^{2\pi} + \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{2\pi} = 0 + 0 = 0$$

Donc : $Q_3 = 4R^2 \times H \times \pi = 48\pi$

Finalemnt : $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 36\pi + 48\pi = 84\pi$

3) En utilisant le **théorème de la divergence** : $Q = \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} \text{div}(\vec{v}) d\Omega$

$$\text{div}(\vec{v}) = 4 - 4y + 2z \rightarrow Q = \int_{\Omega} (4 - 4y + 2z) dx dy dz$$

On a 2 façons de calculer cette intégrale triple.

L'intégrale de y sur le volume Ω vaut zéro car le volume est symétrique par rapport au plan $x = 0$ et la fonction y est impaire.

$$Q = \int_{\Omega} (4 - 4y + 2z) d\Omega = 4 \int_{\Omega} d\Omega - 4 \int_{\Omega} y d\Omega + 2 \int_{\Omega} z d\Omega$$

$$Q = 4\Omega - 0 + 2 \int_{\Omega} z dx dy dz = 48\pi + 2 \int_0^3 z dz \int_S dx dy$$

$$Q = 4\Omega - 0 + 2 \int_{\Omega} z dx dy dz = 48\pi + 2S \frac{9}{2} = 48\pi + 9S = 48\pi + 36\pi = 84\pi$$

La seconde manière est de passer en **coordonnées cylindriques** pour plus facilement définir les paramètres d'intégration ($r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, H]$),

$$x = r \cdot \cos(\theta); y = r \cdot \sin(\theta); z = z$$

$$Q = \int_{z=0}^H \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} (4 - 4 \cdot r \cdot \sin(\theta) + 2 \cdot z) \times r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz$$

$$= 4 \cdot H \cdot \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi - 4 \cdot H \cdot \frac{R^3}{3} \cdot [\cos(\theta)]_0^{2\pi} + 2 \cdot \frac{H^2}{2} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi$$

$$= 48\pi + 36\pi = 84\pi$$

4) On cherche ϕ tel que $\vec{\nabla}\phi = \vec{v}$. On remarque que ce potentiel existe bien car $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$. C'est une **condition nécessaire et suffisante** pour prouver l'existence d'un **potentiel vitesse**. Ici :

$$\vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} 4x \\ -2y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$$

Ici, on intègre très facilement car les dérivées ne sont pas croisées, la fonction que l'on cherche est donc un **polynôme** de (x, y, z) . On trouve directement :

$$\phi = 2x^2 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{z^3}{3} + cste$$

Attention à **ne pas oublier la constante**, tout potentiel est défini à une constante près.

Pour la méthode plus générale on a juste résolu :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ -2y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$$